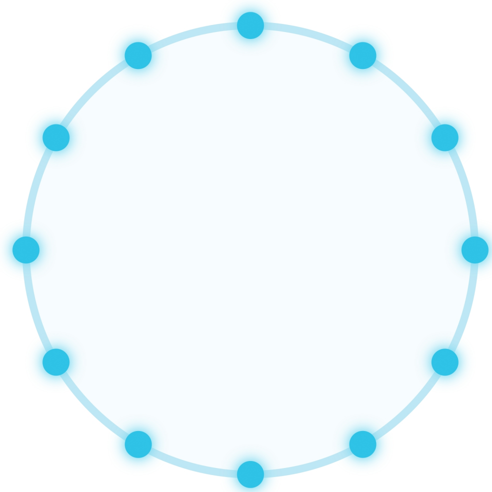
$\mathbf{M} \cup \mathbb{S}_i \subset \mathbf{A}$

UNA
INTERPRETAZIONE MATEMATICA
DEL PROBLEMA DEL
TEMPERAMENTO MUSICALE



RELAZIONE DELL'ATTIVITÀ

Matteo Bramardi
Prof. Ferdinando Arzarello

Premessa

Ho pensato di progettare un'attività che sia compatibile con gli attuali programmi scolastici e sia versatile, in modo da poter essere proposta durante le ore curricolari o extracurricolari in una molteplicità di contesti (lezioni di fine anno, ore di sostituzione, lezioni extracurricolari di potenziamento, ecc.) senza aumentare il carico di studio degli studenti o compromettere lo svolgimento del regolare programma.
A tal fine, ho pensato di contenerne la durata e ridurre la complessità del tema affrontato. Credo poi che sia essenziale presentare gli argomenti in un modo accattivante e sotto una veste grafica d'impatto.

Ho reputato cruciali questi aspetti, perché, volendo in futuro diventare un insegnante, mi piacerebbe poter realmente proporre alle classi questo progetto.

L'attività consiste in una presentazione interattiva che fa uso della *gamification* come strumento didattico. Inoltre, a seguito della pandemia di COVID-19, una particolare attenzione è stata riposta nella possibilità di fruizione a distanza dell'attività.

1 Destinatari e requisiti

L'attività è rivolta a classi della Scuola Secondaria di Secondo Grado a partire dal secondo biennio. Per via della complessità è tuttavia consigliabile riservarla alle classi del quarto e quinto anno. Inoltre, può anche essere proposta durante eventi di divulgazione, qualora si avesse la certezza che il pubblico rispettasse - quanto meno per la maggior parte - i requisiti sotto indicati.

Aritmetica e algebra:

1. operazioni con numeri interi e razionali;
2. numeri irrazionali e reali;
3. calcolo con espressioni letterali;
4. calcolo approssimato*.

Geometria:

1. trasformazioni geometriche;
2. costruzioni geometriche;
3. punti, rette e coniche nel piano cartesiano.

Relazioni e funzioni:

1. linguaggio degli insiemi e delle funzioni
2. equazioni di primo grado;
3. funzione logaritmo e proprietà*;

Dati e previsioni:

1. concetto di modello matematico;

Elementi di informatica:

1. algoritmi;

Nonostante l'attività riguardi strettamente la musica, non sono richieste specifiche competenze in tale ambito.

2 Obiettivi

L'attività non ha l'obiettivo di fornire una preparazione rigorosa sul tema, ma mira piuttosto a stimolare la classe con l'interpretazione matematica di un problema reale ed introdurre nuovi strumenti per la comprensione dei numeri (che non sarebbero normalmente trattati nel programma regolare). Per questa ragione, si farà ricorso a vari espedienti audiovisivi per migliorare l'immediatezza dei concetti.

Per affrontare il tema del temperamento è stato adottato un metodo pseudo-assiomatico, finalizzato a presentare alla classe una tecnica particolarmente formale di approcciarsi ad un problema.

In sintesi, gli obiettivi principali sono i seguenti:

1. interpretare in chiave assiomatica il problema del temperamento musicale;
2. introdurre il problema della miglior approssimazione di un numero con un razionale;
3. introdurre le frazioni continue e utilizzarle per calcolare la miglior approssimazione.

In particolare, il secondo punto mette in luce come la comune approssimazione dei numeri per troncamento non rappresenti affatto una buon metodo di approssimazione, pur essendo rapido e di facile attuazione. Credo che questo argomento, se presentato adeguatamente, possa affascinare anche chi sia rimasto indifferente al più appetibile tema musicale.

* obiettivo di apprendimento del secondo biennio

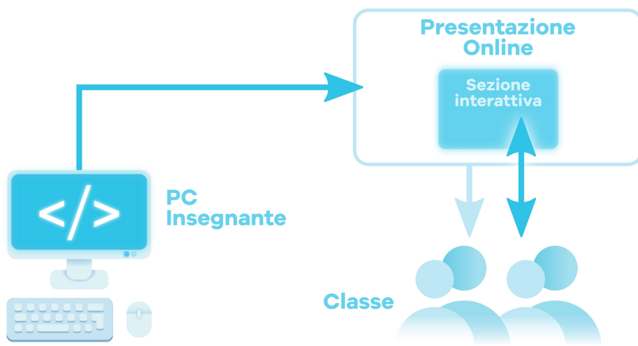
3 Struttura tecnica

La presentazione è realizzata con una tecnica innovativa. Dovendo far fronte anche all'eventualità della didattica a distanza, la presentazione è strutturata in modo da facilitarne la fruizione da remoto.

Un requisito fondamentale è che le sezioni interattive siano perfettamente integrate nell'ecosistema della presentazione e che questo sia facilmente accessibile da un'ampia gamma di dispositivi, in modo da accomodare le esigenze di tutta la classe. Infatti, l'unico programma richiesto per la visione è un semplice browser come Google Chrome, Safari, Firefox o Edge (opportunamente aggiornato).

La presentazione sarà disponibile su un sito web, accessibile tramite link. Ogni singolo studente può visionare le slide e lo spostamento tra slide è controllato dall'insegnante da remoto. Giunti alle sezioni interattive, ciascun studente può invece manipolarne il contenuto individualmente.

Il funzionamento è riassunto nell'immagine sottostante. Si noti come la freccia chiara sia a senso unico e rappresenti il "movimento" tra una slide e l'altra, mentre quella più scura simboleggi la possibilità di interagire individualmente.



Inoltre, sono stati adottati diversi accorgimenti di accessibilità. È possibile posizionare il mouse o cliccare sui riferimenti a formule e teoremi per far comparire un messaggio riportante la suddetta formula o la tesi del teorema in considerazione. Un ulteriore click sul messaggio riporta alla diapositiva in cui l'oggetto in questione è stato introdotto.
In modo analogo, nei passaggi in cui il linguaggio matematico risulta più ostico, è possibile posizionare il mouse o cliccare sulle espressioni per far comparire una formulazione più semplice.
Inoltre, i colori sono usati estensivamente per separare i concetti e gli elementi matematici. Le definizioni e gli assiomi sono indicati con il colore giallo, i teoremi con il verde, le formule generiche e gli interrogativi a cui si cerca una risposta (ovvero tutto ciò che riguarda il procedimento) in blu. Questo linguaggio permette di identificare immediatamente la natura di un riferimento e aiuta a creare uno schema più chiaro delle varie componenti che formano il sistema matematico.

Nota La presentazione fa uso di *MathJax* per la scrittura delle espressioni matematiche. Nel caso di malfunzionamenti, in particolare nel caso della presenza anomala di simboli $, si consiglia di aggiornare semplicemente la pagina.

4 Presentazione

Si consiglia di consultare la presentazione durante la lettura di quanto segue.

Introduzione

La presentazione si apre con momento interattivo volto a sondare le conoscenze pregresse della classe. Attraverso il sito *Flinga*, ogni studente/essa può collocarsi in tre diverse categorie in base alla propria conoscenza musicale: *non appassionati/e che non suonano uno strumento*, *appassionati/e che non suonano uno strumento*, *persone che suonano uno strumento*. Questa attività rappresenta un'ottima opportunità per iniziare la conversazione che transiterà su un riassunto rapido delle principali informazioni preliminari.

L'altezza di un suono (*acuto*, *basso*) è proporzionale alla frequenza e la frequenza varia con continuità. Nella corrispondente slide è possibile cliccare sullo schermo per riprodurre dei suoni di frequenza pari a quella indicata dalla retta delle frequenze, rappresentata nella porzione superiore della diapositiva.
Si introduce quindi la domanda fondamentale di tutta l'attività:

a quali frequenze corrispondono le 12 note di una scala musicale?

Non si affronterà il problema da un punto di vista storico, ma ci si limiterà a fornire un'interpretazione matematica nel tentativo di giungere ad una soluzione. Per consolidare la comprensione dell'interrogativo viene fatto uso di un'applicazione da me sviluppata: una tastiera con i tasti mobili.

La tastiera

Questa applicazione viene impiegata in tre diversi momenti e costituisce un tentativo di *gamification*, ovvero l'implementazione di attività e tecniche ludiche a fini didattici.

È possibile suonare i tasti cliccando su di essi oppure digitando il tasto - della tastiera del PC - a loro assegnato, ma anche spostarli trascinandoli e modificandone così la frequenza in base alla loro posizione lungo l'asse orizzontale. Per ogni tasto è indicata la frequenza corrispondente che, per motivi che risulteranno più chiari in seguito, varia tra 1 e 2, senza particolari unità di misura associate.

L'obiettivo è quello di spostare i tasti in modo da ottenere una configurazione che permetta la riproduzione di melodie piacevoli. È ovviamente impossibile valutare il grado di piacevolezza, parametro del tutto soggetto al gusto personale. Pertanto, un buon criterio di valutazione è rappresentato dalla possibilità di riprodurre melodie già conosciute.

Al di sopra della tastiera è presente una serie di tasti, dei quali solo due sono disponibili durante questa fase della presentazione.

1. Il primo consente di riprodurre la nota melodia dell'Inno alla Gioia[1].
   Si noti che il software tiene conto della posizione corrente dei vari tasti, pertanto i risultati potrebbero suonare bizzarri.
   Il fine è quello di consentire la riproduzione di una nota melodia anche a chi non sapesse suonare uno strumento a tastiera.
2. Il secondo pulsante consente invece di disporre i tasti in modo casuale.

[1] Più propriamente, si tratta della melodia dell'inno europeo, tratta dalla *Nona Sinfonia* composta da Ludwig van Beethoven, che ha messo in musica l'*Inno alla Gioia* di Friedrich von Schiller, da cui il nome.

4.1 Il sistema musicale

Il primo capitolo è dedicato al concetto di *sistema musicale*, indicato con $\mathbb{S}$, ovvero l'insieme delle frequenze $f \in \mathbb{R}$ a cui sono associate le note. Il metodo adottato ricorda quello assiomatico solitamente impiegato per definire una topologia. Pertanto, non è fornita una definizione esplicita di $\mathbb{S}$, ma alcune proprietà (o regole) che esso rispetta.

Innanzitutto, è importante che $\mathbb{S}$ non sia vuoto, ovvero

$$\mathbb{S} \neq \varnothing \tag{1.1}$$

da cui segue che $\exists f \in \mathbb{R} : f \in \mathbb{S}$, detta *frequenza fondamentale*.

Questo primo assioma, tuttavia, non fornisce alcuna informazione sulla struttura di $\mathbb{S}$. Occorre introdurre altri assiomi o - per semplicità - regole che $\mathbb{S}$ deve rispettare. Il primo è

$$f \in \mathbb{S} \implies 2f, \frac{1}{2}f \in \mathbb{S}\,, \tag{1.2}$$

da cui segue immediatamente il seguente teorema

Teorema.

$$f \in \mathbb{S} \implies 2^k f\,, \forall k \in \mathbb{Z}\,. \tag{1.3}$$

L'insegnante può anche fornire una giustificazione dell'assioma introdotto, spiegando come sia coerente con gli esperimenti pratici che evidenziano una connessione tra frequenze in rapporto 2. Un'altra motivazione risiede nella semplicità e nell'estetismo della proprietà. Nel caso di un evento con un pubblico matematicamente preparato, tale assioma può anche essere contestualizzato nel tema più ampio dell'analisi armonica.
In ogni caso, è fondamentale sottolineare come queste regole siano assunte come il punto di partenza e non richiedano pertanto di essere dimostrate.

L'assioma precedente permette di identificare una serie di frequenze che, tuttavia, se suonate con un qualsiasi strumento, non consentono di comporre delle melodie soddisfacenti.

Il secondo assioma ad essere introdotto è il seguente:

$$f \in \mathbb{S} \implies 3f \in \mathbb{S}\,. \tag{1.4}$$

Combinando (1.1) e (1.4) si ottiene

Teorema.

$$f \in \mathbb{S} \implies \frac{3}{2}f \in \mathbb{S}\,. \tag{1.5}$$

Viene quindi implementata una terminologia analoga al linguaggio musicale, attraverso la definizione di due particolari *intervalli*, ovvero il rapporto tra due frequenze:

$$\frac{2f}{f} = 2 := \text{intervallo di ottava (o } \textit{ottava}\text{)}\,;$$
$$\frac{3f}{2f} = \frac{3}{2} := \text{intervallo di quinta (o } \textit{quinta}\text{)}\,;$$

Come la parola "intervallo" suggerisce, è come se la "distanza" tra due note (e quindi frequenze) si misurasse tramite un rapporto e non per via di una sottrazione, come si potrebbe essere indotti a pensare.
Tali definizioni sono in sintonia con quanto dai noi effettivamente percepito durante l'ascolto della musica.

Si giunge quindi al passaggio chiave della costruzione di $\mathbb{S}$. Si sono finora elencati assiomi e teoremi che identificano alcune frequenze in $\mathbb{S}$, ma non in un modo utile a comporre delle melodie interessanti. L'ultimo teorema analizzato è lo strumento che consente di popolare $\mathbb{S}$. Infatti, reiterando (1.5), si ottiene

$$f \in \mathbb{S} \xrightarrow{1.5} \frac{3}{2}f \in \mathbb{S} \xrightarrow{1.5} \left(\frac{3}{2}\right)^2 f \in \mathbb{S} \xrightarrow{1.5} \dots \xrightarrow{1.5} \left(\frac{3}{2}\right)^n f \in \mathbb{S}\,,$$

ovvero

$$\left\{ \left(\frac{3}{2}\right)^n f \,:\, n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{S}\,.$$

Segue un'animazione. Si immagini di spezzare e avvolgere la retta delle frequenze intorno a delle circonferenze di raggio via via crescente. Supponendo di centrare queste circonferenze in un sistema di coordinate cartesiane, l'intersezione di queste con il semiasse positivo delle ordinate corrisponderebbe ai punti $f, 2f, 2^2f, 2^3f, ...$. Ovvero, ogni circonferenza contiene esattamente un intervallo di ottava, a partire dalla frequenza fondamentale f. In questo modo, il salto da una circonferenza ad un'altra lungo lo stesso raggio rappresenta il passaggio all'ottava superiore o inferiore, cioè rispettivamente la moltiplicazione o divisione per 2 di f.

Si noti che la retta delle frequenze è stata trasformata con una scala logaritmica per ragioni sia estetiche sia funzionali. Infatti, il logaritmo trasforma i rapporti in differenze. In questo modo, l'intervallo (ovvero un rapporto) musicale è rappresentato come la lunghezza dell'arco di circonferenza che separa due frequenze.

L'animazione mostra l'iterazione di (1.5). Dopo un certo numero di passaggi (per il momento non meglio specificato), si verifica un fatto singolare. Le frequenze sembrano quasi allinearsi lungo il raggio corrispondente alle frequenze iniziali, ovvero

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n \approx 2^{\,m} \text{ per qualche } n, m \in \mathbb{N}\,.$$

Occorre pertanto determinare n, m, dove n indica proprio il numero di note in una scala, perché l'$n+1$-esima frequenza risulta simile a $2^m f$ (la frequenza fondamentale trasposta alla m-esima ottava).

Con alcune manipolazioni algebriche che coinvolgono le proprietà dei logaritmi (vedere slide), si ottiene

$$\frac{m}{n} = \log_2 \frac{3}{2}\,. \tag{1.6}$$

Tuttavia, $\log_2 \frac{3}{2}$ è un numero irrazionale, mentre n, m devono essere numeri interi. Occorre pertanto approssimare il logaritmo in questione con un razionale. Tuttavia, troncare un numero dopo una certa quantità di cifre decimali non garantisce che il razionale risultante, che presenta a denominatore una potenza di 10, sia una buona approssimazione. Potrebbero infatti esistere dei razionali con diversi valori a denominatore più vicini a $\log_2 \frac{3}{2}$.

Ciò porta a chiedersi cosa sia una buona approssimazione per un numero irrazionale.

4.2 Migliori approssimazioni e frazioni continue

Il seguente capitolo è trattato in maniera dettagliata nelle slide.

In breve, è definita la *miglior approssimazione* per $x \in \mathbb{R}$ sia in modo formale sia intuitivo. Attraverso l'animazione si sottolinea come esistano infinite migliori approssimazioni per un numero, via via migliori. Trovata la prima, a/b, non sono presenti altri razionali con denominatore minore (o uguale, ma con un numeratore diverso) nell'intervallo evidenziato di blu, ovvero più vicini a x. Esistono invece razionali che meglio approssimano x con denominatore maggiore (a'/b').

Sono poi introdotte le *frazioni continue*[2] e i convergenti, che costituiscono lo strumento per il calcolo delle migliori approssimazioni di un numero, coincidenti proprio con i convergenti.

Teorema. $\forall\, x = [a_0, a_1, a_2, ...] \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,,\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{p_n}{q_n} := [a_0, ..., a_n] \text{ \textit{è una miglior approssimazione per} } x\,. \tag{2.1}$$

È proposto l'esempio di π e, successivamente, tramite due esercizi, è richiesto alla classe il calcolo dello sviluppo in frazioni continue di $\log_2 \frac{3}{2}$ e dei primi convergenti.

[2] Più propriamente, si tratta delle frazioni continue aritmetiche.

4.3 Il temperamento pitagorico

Tra i vari convergenti, ovvero le migliori approssimazioni, si trova $\frac{7}{12}$, pertanto

$$\frac{m}{n} \approx \frac{7}{12}\,, \tag{3.1}$$

da cui segue che è possibile costruire un sistema musicale con $n = 12$ note. Anche gli altri valori di n ricavabili dalle migliori approssimazioni sono appropriati (si veda uno degli esercizi finali). Alcuni di questi, però, risultano assurdi dal punto di vista pratico perché corrispondenti a sistemi con troppe o troppe poche note.

Si osservi che m ha un particolare significato. Infatti, la quinta corrisponde all'm-esima nota della scala, cioè vale circa $2^{\frac{7}{12}}$.

Nota Nel sistema di temperamento equabile, la settima nota della scala vale esattamente $2^{\frac{7}{12}}$.

Il sistema musicale che è stato così definito è detto *temperamento pitagorico*, per via della sua tradizionale attribuzione al celebre matematico greco.

Si propone nuovamente la tastiera con tasti mobili. Uno dei pulsati precedentemente non disponibili è sbloccato e consente di disporre i tasti secondo il temperamento pitagorico. La riproduzione dell'Inno alla Gioia o di una qualsiasi altra melodia risulterà piacevole all'ascolto, dimostrazione del fatto che questo sistema può essere effettivamente impiegato per l'accordatura di uno strumento.

In effetti, il temperamento pitagorico è stato ampiamente utilizzato in passato, ma non costituisce una buona scelta per la musica polifonica occidentale moderna.

La prima ragione risiede proprio nella discrepanza tra $2^7 f$ e $\left(\frac{3}{2}\right)^n f$.
Un'altra è invece la presenza di due tipi di intervalli nella scala che, tradotta in termini visivi, significa che le frequenze non sono equamente distanziate lungo le circonferenze. Questo implica che la trasposizione di una melodia da una tonalità all'altra genera potenzialmente due composizione completamente diverse in termini di rapporto tra le frequenze suonate. Il risultato è una melodia "stonata".

Entrambi i problemi sono evidenziati da un'animazione. In particolare, la trasposizione corrisponde alla rotazione della circonferenza intorno al proprio centro in modo da far corrispondere la frequenza fondamentale ad un'altra frequenza. Al termine della rotazione alcune frequenze sulla circonferenza ruotata coincideranno con una frequenza sulla circonferenza non ruotata, altre no. Queste ultime sono la causa delle stonature percepite.
In questa procedura entra in gioco la scala logaritmica impiegata per l'avvolgimento della retta delle frequenze lungo le circonferenze.

4.4 Il temperamento naturale ed equabile

Per ovviare ai problemi del sistema pitagorico è possibile introdurre altre regole, come avviene per il sistema naturale. In questo modo si può popolare la scala senza ricorrere alla reiterazione di (1.5).

Nota Il termine naturale deriva dagli *armonici naturali* e, più in generale, il sistema naturale può essere derivato dalla decomposizione armonica di un segnale (vedere C. Gasquet e P. Witomski, *Fourier Analysis and Applications*).

Tuttavia, il temperamento naturale non ovvia al problema della trasposizione.

Per questa ragione, il temperamento maggiormente impiegato per la musica polifonica occidentale è quello *equabile*, che prevede la suddivisione dell'ottava in dodici intervalli identici e di valore $2^{\frac{1}{12}}$.

Visivamente, questo corrisponde a disporre le frequenze lungo la circonferenza dell'ottava in modo che siano equamente distanziate. In tal modo, una qualsiasi rotazione (ovvero una trasposizione) che faccia corrispondere una frequenza sulla circonferenza ruotata ad una frequenza sulla circonferenza non ruotata, porterà ad una corrispondenza anche di tutte le altre frequenze. In termini uditivi, ciò comporta l'assenza di stonature e la possibilità di riprodurre una melodia in più tonalità.

Al temperamento equabile è tipicamente associata la figura di J. S. Bach. Nonostante non vi siano fonie storiche ad accertare il tipo di temperamento usato da Bach - poiché all'epoca ne erano impiegati di diversi tipi - è diffusa l'idea che Bach scrisse *Das wohltemperirte Klavier* (*Il clavicembalo ben temperato*) per celebrare l'efficacia del temperamento equabile. Al di là della questione storica, l'opera risulta comunque emblematica. Il celeberrimo brano iniziale, che ad un primo ascolto potrebbe risultare semplicemente ripetitivo, serve proprio a dimostrare la possibilità di trasporre la stessa voce melodica in tutte le tonalità senza stonature.

In conclusione, è riproposta la tastiera con tasti mobili. In questo caso sono abilitati anche gli ultimi due pulsanti che consentono di disporre i tasti secondo il temperamento naturale ed equabile rispettivamente.

È importante osservare come, seppur siano evidenti le differenze visive nel posizionamento dei tasti, a livello sonoro i tre sistemi possano sembrare identici, quanto meno ad un orecchio non sufficientemente allenato. Le discrepanze sostanziali si registrano quando vengono prese in considerazioni le trasposizioni e la musica polifonica.
È infatti possibile suonare il suddetto Inno alla Gioia (o una qualsiasi altra melodia) in una tonalità diversa da quella originale di DOe nel sistema pitagorico o naturale per notare le stranezze e stonature sopra discusse.

Esercizi

L'attività si chiude con una serie di esercizi. L'obiettivo è consolidare quanto appreso e ampliarlo. Sono proposti 3 esercizi strettamente collegati con quanto analizzato nella presentazione. È possibile eventualmente integrare ulteriori esercizi di calcolo di sviluppi in F.C. e di convergenti se si ritiene necessario potenziare questi aspetti.

La scala cinese Questo esercizio prevede di rielaborare quanto appreso attraverso la costruzione e l'analisi di una scala a 5 note. La giustificazione del numero 5 è fornita, come per 12, dai convergenti di $\log_2 \frac{3}{2}$. In questo sistema, l'intervallo di quinta corrisponde a $3/5$. Per temperare in senso equabile questo sistema, è sufficiente dividere l'ottava in intervalli identici di ampiezza $2^{\frac{1}{5}}$.
Obiettivo di questo esercizio è far comprendere come la scelta del numero 12 di note, seppur ragionevole, sia fondamentalmente arbitraria e come un altro numero di note sia possibile. Inoltre, l'esercizio consente di rivedere i passaggi precedentemente seguiti e applicarli ad un diverso contesto.

Nota Il sistema equabile cinese a 5 note è un sottoinsieme del sistema equabile occidentale a 12 note. La scala cinese può essere ottenuta suonando solamente i tasti neri del pianoforte.

Il comma pitagorico L'esercizio introduce la definizione di *comma pitagorico* ed è composto da una parte di calcolo e una di ragionamento. La prima è di banale risoluzione. Per quanto riguarda la seconda, il comma pitagorico rappresenta l'intervallo tra la frequenza fondamentale e la nota ottenuta reiterando la quinta 12 volte e trasponendola all'ottava inferiore 7 volte. Queste due note, che sono rappresentate vicine sulla circonferenza delle frequenze, hanno un suono simile ma non identico. La differenza in termini percentuali tra le due può essere calcolata proprio a partire dal comma pitagorico, essendo quest'ultimo un intervallo e, quindi, un rapporto (per definizione di intervallo).

Esercizio bonus Questo esercizio mira ad analizzare in maggior dettaglio il sistema equabile. Come già evidenziato in precedenza, la quinta corrisponde all'incirca alla settima nota, che in questo caso ha frequenza $2^{\frac{7}{12}}$. La quinta in $\mathbb{S}_P$ e la quinta in $\mathbb{S}_E$ non coincidono e l'intervallo è pari al rapporto tra $3/2$ e $2^{\frac{7}{12}}$.

Bibliografia

1. C. D. Olds, *Frazioni Continue*, Bologna, Zanichelli, 1968
(*Continued Fractions, Yale University*, 1963).

2. E. G. Dunne, M. McConnel, *Pianos and Continued Fractions*, Mathematics Magazine, vol. 2, n. 2, 1999 e disponibile presso oeis.org/DUNNE/TEMPERAMENT.HTML.

3. E. G. Dunne, *This note's for you: A mathematical temperament*, 2000
disponibile presso oeis.org/DUNNE/Temperament2x.PDF.

4. J. Douthett, R. Krantz, *Continued fractions, best measurements, and muscial scales and intervals*, Journal of Mathmatics and Musical, 2007.

5. C. Gasquet e P. Witomksi, *Fourier Analysis and Applications*, 1a ed., New York, NY, Springer, 1999.

6. T. Lowrie, R. Jorgensen (Zevenbergen), *Ditigal Games and Mathematics Learning*, Springer, 2015.

7. *Scales: Just vs Equal Temperament*, su Physics of Music - Notes.

8. *Piani di studio - Scuola secondaria di II grado* su Zanichelli.it.